# Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 3

**Ciągłość miary. Przykłady miar**

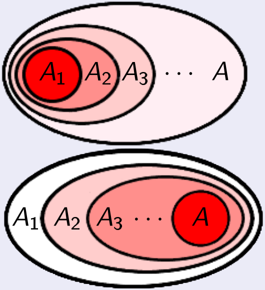
**Def.** Powiemy, że ciąg zbiorów $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest

- **wstępujący** jeśli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

  i wtedy piszemy $A_n \nearrow A$, gdzie $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

- **zstępujący** jeśli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

  i wtedy piszemy $A_n \searrow A$, gdzie $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$




**Stw. (Ciągłość miary)** Każda miara $\mu$ jest

1. **ciągła z dołu**, tzn. dla każdego ciągu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

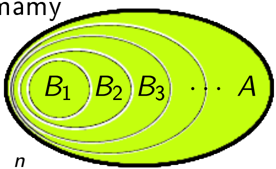
2. $\mu$ jest **ciągła z góry** na zbiorach o mierze skończonej, tzn. dla każdego $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ takiego, że $\mu(A_n) < \infty$ mamy

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$$\boxed{\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \text{jeśli } A_n \nearrow A \quad \text{lub} \quad A_n \searrow A \text{ oraz } \mu(A_n) < \infty}$$

**Dowód:** (1) Niech $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ zbiory z $\mathcal{F}$. Kładąc $B_1 := A_1$ oraz $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ dla $n > 1$, mamy

$$\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \text{ parami rozłączne oraz } A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

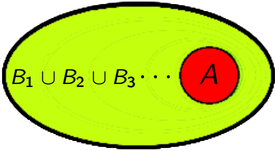



Zatem

$$\mu(A) \overset{\sigma\text{-add}}{=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \overset{\text{add}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

(2) Niech $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ zbiory z $\mathcal{F}$, $\mu(A_1) < \infty$. Kładąc $B_n := A_1 \setminus A_{n+1}$ dla $n \geqslant 1$ mamy $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$ oraz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_1 \setminus A_n \overset{\text{De Morgan}}{=\!=\!=} A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A.$$




Zatem

$$\mu(A_1 \setminus A) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \overset{(1)}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \overset{\text{różn}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_1) - \mu(A_{n+1}).$$

Z drugiej strony $\mu(A_1 \setminus A) \overset{\text{różn}}{=\!=} \mu(A_1) - \mu(A)$. Stąd $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.■

## Tw. ($\sigma$-addytywność vs skończona addytywność)

Dla **skończenie addytywnej** funkcji $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ na $\sigma$-algebrze $\mathcal{F}$ następujące warunki są równoważne

1. $\mu$ jest $\sigma$-**addytywna**
2. $\mu$ jest **ciągła z dołu**
3. $\mu$ jest $\sigma$-**poddadytywna**, tzn. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ dla każdego $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$.

$\boxed{\sigma\text{-addytywność} = \begin{smallmatrix}\text{skończona}\\ \text{addytywność}\end{smallmatrix} + \text{ciągłość}}$

Jeśli $\mu < \infty$, to powyższe warunki są równoważne następującym

4. $\mu$ jest **ciągła z góry**
5. $\mu$ jest **ciągła w** $\emptyset$, tzn. $A_n \searrow \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

**Dowód:** Z poprzedniego dowodu (1)⇒(2) oraz (2)⇒(4) jeśli $\mu < \infty$. Implikacja (4)⇒(5) jest jasna, bo skończona addytywność oraz $\mu \neq \infty$ implikują, że $\mu(\emptyset) = 0$.

Reszta i szczegóły  i/lub  i/lub 

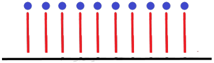
# Przykłady miar

**Miara Diraca** = probabilistyczna miara skupiona w jednym punkcie.
Dla dowolnej przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{F})$ i $x \in X$ mamy miarę

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

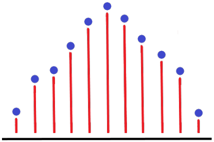
**Miara licząca** = moc zbioru. Na $(X, 2^X)$ mamy miarę $\boxed{\mu = \sum_{x \in X} \delta_x}$

$$\mu(A) := \begin{cases} |A|, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem skończonym} \\ \infty, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem nieskończonym} \end{cases}$$



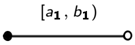
**Dyskretna miara probabilistyczna**="$p_1, p_2, \ldots \in [0,1]$ oraz $\sum_i p_i = 1$"
Na zbiorze $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ wzór $\boxed{P = \sum_i p_i \delta_{\omega_i}}$

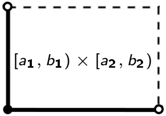
$$P(A) := \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

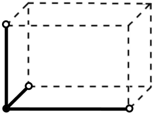


definiuje miarę (prawdopodobieństwo) $P : 2^\Omega \to [0,1]$.
**Uw.** Jeśli $\{\mu_i\}_{i \in I}$ miary na $(X, \mathcal{F})$ oraz $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq [0, +\infty]$, t
wzór $\left(\sum_{i \in I} \alpha_i \mu_i\right)(A) := \sum_{i \in I} \alpha_i \mu_i(A)$ definiuje miarę na $\mathcal{F}$

**konwencja**
$0 \cdot \infty = 0$



$= [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times [a_3, b_3)$

długość $= b_1 - a_1$ powierzchnia $= |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2|$ objętość $= |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot |b_3 - a_3|$

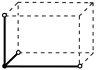
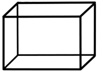
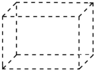
**Tw.** Istnieje dokładnie jedna miara $\lambda^n$ na $\sigma$-ciele $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taka, że

$$\forall_{\substack{a_i, b_i \in \mathbb{R} \\ a_i < b_i}} \quad \lambda^n\Big([a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)\Big) = \prod_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$$


*„objętość prostopadłościanu jest iloczynem długości krawędzi go rozpinających."*

**Def.** Miarę $\lambda^n$ z powyższego twierdzenia nazywamy $n$-**wymiarową miarą Lebesgue'a**, lub $n$-**wymiarową objętością**. ($\lambda := \lambda^1$ to **długość**)

**Uw.** Ciągłość miary pozwala obliczać $\lambda^n$ dla różnych brył. Na przykład

$\lambda^n($  $) = \lambda^n($  $) = \lambda^n($  $)$

półotwarty domknięty otwarty

**Prz. 1)** Każdy zbiór jednoelementowy na prostej $\mathbb{R}$ ma zerową długość:

$$\lambda(\{a\}) = \lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} [a, a+1/n)) \overset{\text{ciągłość}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \lambda([a, a+1/n)) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

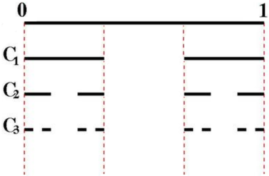
**2)** Każdy przeliczalny podzbiór $\mathbb{R}$ ma zerową długość.

(przeliczalna suma zbiorów o mierze zerowej ma miarę zero)

**3)** Zbiór Cantora $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ jest nieprzeliczalny,

ale też ma zerową długość:

$$\lambda(C) \overset{\text{ciągłość}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) \overset{\text{def+add}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot 1/3^n = 0$$




### Uwaga

Paradoks Banacha-Tarskiego  pokazuje, że miary Lebesgue'a nie da się określić na wszyskich podzbiorach $\mathbb{R}^n$.

Dlatego ograniczamy się do $\sigma$-algebry zbiorów borelowskich (jesteśmy zmuszeni)!

### Uwaga

Istnienie i jednoznaczność miary Lebesgue'a wynika z:

- **Twierdzenie o Istnieniu Miary** (Caratheodory'ego)
- **Twierdzenie o Jednoznaczności Miary** (Dynkina)